Mr Mamouni : *myismail@altern.org*
CPGE Med V, Casablanca, Maroc.

EXERCICE 1

1) $\dfrac{\partial h}{\partial v}=0 \Longleftrightarrow h=Cte$ qui ne dépond pas de v mais seulement de u, donc $h(u,v)=h_1(u)$, comme h est de classe $\mathcal{C}^1$, alors h_1 l'est aussi.

2) a) Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, car ses fonctions coordonnées associées $\Phi_1:(u,v)\mapsto ue^v$ et $\Phi_2:(u,v)\mapsto e^{-v}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, en tant que produit et composé de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
D'autre part, $\forall(x,y)\in\Omega, \exists! v=-\ln y\in\mathbb{R}$ tel que : $y=e^{-v}$ et $\exists! u=xy\in\mathbb{R}$ tel que : $x=ue^v$, donc $\exists!(u,v)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $(x,y)=\Phi(u,v)$, et donc Φ est bijective.

b) D'aprés ce qui précède, on a : $\Phi^{-1}(x,y)=(xy,-\ln y)$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, car ses fonctions coordonnées associées $\Phi_1^{-1}:(x,y)\mapsto xy$ et $\Phi_2:(x,y)\mapsto -\ln y$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, en tant que produit et composé de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

3) a) $f^*=f\circ\Phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Phi(\mathbb{R}^2)=\Omega$, avec les relations suivantes :

$$\frac{\partial f^*}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial u}.\frac{\partial f}{\partial y}=e^v\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial v}.\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial v}.\frac{\partial f}{\partial y}=ue^v\frac{\partial f}{\partial x}-e^{-v}\frac{\partial f}{\partial y}$$

b) D'aprés la question précèdente, on a :
$\dfrac{\partial f^*}{\partial v}=ue^v\dfrac{\partial f}{\partial x}-e^{-v}\dfrac{\partial f}{\partial y}=x\dfrac{\partial f}{\partial x}-y\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$, donc $f^*(u,v)=F(u)$ et par suite $f(x,y)=f\circ\Phi(u,v)=f^*(u,v)=F(u)=F(xy)$, avec F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

4) a) Les application linéaires de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ s'écrivent sous la forme $g(x,y)=\alpha x+\beta y$, donc $x\dfrac{\partial g}{\partial x}-y\dfrac{\partial g}{\partial y}=ax+by\Longleftrightarrow \alpha x-\beta y=ax+by$, prendre donc $g(x,y)=ax-by$.

b) La solution générale, f de l'équation $x\dfrac{\partial f}{\partial x}-y\dfrac{\partial f}{\partial y}=ax+by$, s'écrit sous la forme $f=f_H+g$, où $f_H(x,y)=F(xy)$ est la solution générale de l'équation homegène sans second membre, et $g(x,y)=ax-by$ une solution particulière de l'équation avec second membre.

PROBLÉME.

Deuxième partie

1) g est de classe $\mathcal{C}^1$, en tant que primitive de f qui est continue.
On a $\psi(f)(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ pour $x>0$, donc ψ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $x\neq 0$, le théorème des accroissement finie, donc $g(x)-g(0)=xg'(c)$ avec c compris entre 0 et x, d'où $\psi(f)(x)=f(c)\longrightarrow f(0)=\psi(f)(0)$ car $g(0)=0$ et $g'=f$ continue, donc $\psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, autrement dit $\psi(f)\in E$.

2) $\sqrt{f}\geq 0$ et $x\geq 0$, donc $\psi(\sqrt{f})(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\sqrt{f(t)}dt\geq 0$.
D'autre part : en utilisant l'inégalité de Cauchy-schwarz pour 1 et $\sqrt{f}$,

on aura : $\displaystyle \frac{1}{x}\int_0^x \sqrt{f(t)}dt \quad \leq \frac{1}{x}\sqrt{\int_0^x dt}\sqrt{\int_0^x f(t)dt}$.

$$= \sqrt{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt} = \sqrt{\psi(f)}$$

On aura égalité, s'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-schwarz pour 1 et $\sqrt{f}$, donc s'ils sont proportionnels, c'est à dire f est constante.

3) a) Il est clair que $\psi(f+\lambda g) = \psi(f) + \lambda\psi(g)$, n'oubliez pas de le mentionner pour $x = 0$, donc ψ est linéaire.
D'autre part d'aprés 1.1) $\psi(f) \in E$, $\forall f \in E$, donc ψ est un endomorphisme de E.

b)
$$\begin{aligned} f \in \text{ Ker } (\psi) &\Longrightarrow \psi(f)(x) = 0,\ \forall x > 0 \\ &\Longrightarrow g(x) = \int_0^x f(t)dt = 0,\ \forall x > 0 \\ &\Longrightarrow g'(x) = f(x) = 0,\ \forall x \geq 0 \end{aligned}$$
Donc ψ est injective.

c) D'aprés 1.1) on peut affirmer que $\psi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc toute fonction de E qui ne l'est pas ne peut pas être de la forme $\psi(f)$, c'est à dire n'admet pas d'antécédant, donc ψ n'est pas surjective. $F(x) = |x-1|$ est un exemple de fonction de E qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, car non dérivable en 1.

4) a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du 1ér ordre à coéfficients non constant, dont la solution est :
$$f(x) = Ke^{-\displaystyle\int_0^x \frac{\lambda-1}{\lambda}tdt} = Ke^{\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln x} = Kx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}.$$

b) f est prolongeable en 0^+ *si et seulement si* $\lim\limits_{x\to} f(x)$ est finie *si et seulement si* $\dfrac{1-\lambda}{\lambda} \geq 0$ *si et seulement si* $0 < \lambda \leq 1$.

5) a) 0 ne peut pas être une valeur propre de ψ car elle est injective.

b) Soit $f \in E$ non nulle telle que $\psi(f) = \mu f$, donc $f = \dfrac{1}{\mu}\psi(f)$ car $\mu \neq 0$ d'aprés 4.1). De plus d'aprés 1.1) on peut affirmer que $\psi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f aussi.

c) Soit λ valeur propre de ψ et f vecteur propr associé, donc $\psi(f)(x) = \lambda f(x)$, d'où $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \lambda x f(x)$, en dérivant cette égalité on obtient : $\lambda x f'(x) + (\lambda - 1)f(x) = 0$, dont les solutions sont : $f(x) = Kx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$, dérivables sur $]0,+\infty[$ pour tout $\lambda \in]0,1]$.

Troisième partie

1) a) Pour tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}^+$, on a d'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \quad \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt}$

$$\leq M = \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)dt}\sqrt{\int_0^{+\infty} g^2(t)dt}$$

Donc fg est intégrable sur $\mathbb{R}^+$

b) Il est clair que l'application nulle est de carré intégrable, donc appartient à E_2, d'autre part, soit $(f,g) \in E_2, \lambda \in \mathbb{R}$, alors :
$(f+\lambda g)^2 = f^2 + 2\lambda fg + g^2$ car f^2, fg, g^2 sont toutes intégrables, donc $f + \lambda g \in E_2$ et par suite E_2 est un sous-espace vectoriel de E.

c) – Symétrie : $\displaystyle(f,g) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt = \int_0^{+\infty} g(t)f(t)dt = (g,f)$.
– Bilinéarité : $(f+\lambda g, h) = (f,h) + \lambda(g,h)$, car l'intégrale est linéaire, d'où la linéarité à gauche, à l'aide de la symétrie on conclut la bilinéarité.
– Positive : $\displaystyle(f,f) = \int_0^{+\infty} f^2(t)dt \geq 0$.
– Définie : $\displaystyle(f,f) = 0 \Longrightarrow \int_0^{+\infty} f^2(t)dt = 0 \Longrightarrow f^2 = 0$, car f^2 continue positive, donc $f = 0$.

2) a) $\dfrac{g^2(t)}{t} = g(t)\psi(f)(t) \longrightarrow g(0)\psi(f)(0) = 0$, quand $t \longrightarrow 0^+$, car g et $\psi(f)$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$ et $g(0) = 0$.

b) $\dfrac{g^2(t)}{t^2} = (\psi(f)(t))^2 \longrightarrow (\psi(f)(0))^2$, quand $t \longrightarrow 0^+$, car $\psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc $t \mapsto \dfrac{g^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0,b]$ car prolongeable par continuité en 0^+.

D'autre part : $\displaystyle\int_0^b \psi(f)^2(t)dt = \int_0^b \frac{g^2(t)}{t^2}dt$, par définition de $\psi(f)$, pour l'autre égalité on va utiliser une intégration par parties, avec $u = g^2(t), v' = \dfrac{1}{t^2}$, donc $u' = 2g'(t)g(t)$ et $v = -\dfrac{1}{t}$, d'où :

$$\begin{aligned}
\int_0^b \frac{g^2(t)}{t^2}dt &= \left[-\frac{g^2(t)}{t}\right]_0^b + 2\int_0^b \frac{g'(t)g(t)}{t}dt \\
&= -\frac{g^2(b)}{b} + 2\int_0^b \frac{g'(t)g(t)}{t}dt \\
&\quad \text{car : } \lim_{t\to 0^+} \frac{g^2(t)}{t} = 0 \\
&= -\frac{g^2(b)}{b} + 2\int_0^b f(t)\psi(f)(t)dt \\
&\quad \text{car : } g'(t) = f(t), \frac{g(t)}{t} = \psi(f)(t)
\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}
\int_0^b \psi(f)^2(t)dt &\leq 2\int_0^b f(t)\psi(f)(t)dt \quad \text{D'aprés (1)} \\
&\leq 2\sqrt{\int_0^b f^2(t)dt}\sqrt{\int_0^b \psi(f)^2(t)dt}
\end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de Cauchy-Shwarz.

Si $\displaystyle\int_0^b \psi(f)^2(t)dt = 0$, c'est terminé, sinon on peut simplifier avec et on obtient encore le résultat demandé.

d) Découle immédiatement de 2-4) en faisant tendre b vers $+\infty$.

e) D'aprés 2-5) on peut conclure que ψ_2 est 2-lipshitzienne, donc continue.

3) a)

b) Faire tendre b vers $+\infty$ dans (1), en utilisant 3-1).

4) $$\begin{aligned}
\|\psi(f) - 2f\|^2 &= (\psi(f) - 2f, \psi(f) - 2f) \\
&= (\psi(f), \psi(f)) - 4(\psi(f), f) + 4(f, f) \\
&= \|\psi(f)\|^2 - 4(\psi(f), f) + 4\|f\|^2 \\
&= -4(\psi(f), f) + 8\|f\|^2 \quad \text{Car : } \|\psi(f)\| = 2\|f\| \\
&= -4(\psi(f), f) + 2\|\psi(f)\|^2 \quad \text{Car : } \|\psi(f)\| = 2\|f\| \\
&= 0 \quad \text{D'aprés 3-2)}
\end{aligned}$$

Donc $\psi(f) - 2f = 0$, ainsi si $f \neq 0$, on aurait 2 est une valeur propre de ψ, impossible puisque les valeurs propres de ψ sont les $\lambda \in]0, 1]$.

5) a) $f_a^2(x) = e^{-2ax}$ est évidement intégrable sur $\mathbb{R}^+$, avec : $\displaystyle\|f_a\|^2 = \int_0^{+\infty} e^{-2ax}dx = \frac{1}{2a}$.

b) Pour $x \neq 0$, on a : $\displaystyle\psi(f_a)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x e^{-at}dt = \frac{1 - e^{-ax}}{ax}$.

Pour $x = 0$, on a : $\psi(f_a)(0) = f_a(0) = 1$.

$$\begin{aligned}
(f_a, \psi(f_a)) &= \int_0^{+\infty} f_a(x)\psi(f_a)(x)dx \\
&= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-2ax}}{x}dx \\
&= \frac{1}{a}I(a, 2a) \\
&= \frac{\ln a}{a} \quad \text{D'aprés 1-4 de la 1ère partie}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\|\psi(f_a)\|}{\|f_a\|}\right)^2 &= 2a(\psi(f_a), \psi(f_a) \quad \text{D'aprés 1-1} \\
&= 4a(f_a, \psi(f_a)) \quad \text{D'aprés 3-2, 3ème partie} \\
&= 4\ln a
\end{aligned}.$$

D'où : $\displaystyle\frac{\|\psi(f_a)\|}{\|f_a\|} = 2\sqrt{\ln a}$.

6) a) Pour $x \neq 0$, on a : $\displaystyle\psi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Pour $x = 0$, on a : $\psi(f)(0) = f(0) = 1$.

b) Au voisiange de 0 : $f^2(x) \sim 1$

Au voisinage de $+\infty$: $f^2(x) \sim \dfrac{1}{x^2}$, donc f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, or f continue, donc $f \in E_2$.

$$
\begin{aligned}
(f|\psi(f)) &= \int_0^{+\infty} f(t)\psi(f)(t)dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt \\
&= \int_0^{1} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt \\
&= \int_0^{1} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt + \int_0^{1} \frac{\ln\left(\frac{1+u}{u}\right)}{1+u}du \qquad \text{Avec : } u=\frac{1}{t} \\
&= \int_0^{1} \left(\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)} + \frac{\ln\left(\frac{1+t}{t}\right)}{1+t}\right)dt \quad \text{On remplace u par t} \\
&= \int_0^{1} \frac{(1+t)\ln(1+t)-t\ln t}{t(1+t)}dt \\
&= \int_0^{1} \left(\frac{\ln(1+t)}{t} - \frac{\ln t}{1+t}\right)dt
\end{aligned}
$$

c) $(\ln t\ln(1+t))' = \dfrac{\ln(1+t)}{t} + \dfrac{\ln t}{1+t}$, donc $\ln t\ln(1+t)$ est une primitive de $\dfrac{\ln(1+t)}{t} + \dfrac{\ln t}{1+t}$.

Calculons d'abord : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt$, en effet :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt = [\ln t\ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt$$

Intégration par parties avec :

$u=\ln(1+t) \quad v'=\dfrac{1}{t}$

$u'=\dfrac{1}{1+t} \qquad v=\ln t$

$$= -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt$$

Car au voisinage de 0^+ : $\ln t\ln(1+t) \sim t\ln t \longrightarrow 0$

Deuxième partie

1) a) Pour tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}^+$, on a d'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} \leq M = \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)dt}\sqrt{\int_0^{+\infty} g^2(t)dt}$$

Donc fg est intégrable sur $\mathbb{R}^+$

b) Il est clair que l'application nulle est de carré intégrable, donc appartient à E_2, d'autre part, soit $(f,g)\in E_2, \lambda\in\mathbb{R}$, alors : $(f+\lambda g)^2 = f^2+2\lambda fg+g^2$ car f^2, fg, g^2 sont toutes intégrables, donc $f+\lambda g\in E_2$ et par suite E_2 est un sous-espace vectoriel de E.

c)
- Symétrie : $(f,g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt = \int_0^{+\infty} g(t)f(t)dt = (g,f)$.
- Bilinéarité : $(f+\lambda g,h) = (f,h)+\lambda(g,h)$, car l'intégrale est linéaire, d'où la linéarité à gauche, à l'aide de la symétrie on conclut la bilinéarité.
- Positive : $(f,f) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)dt \geq 0$.
- Définie : $(f,f)=0 \Longrightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)dt = 0 \Longrightarrow f^2=0$, car f^2 continue positive, donc $f=0$.

2) a) $\dfrac{g^2(t)}{t} = g(t)\psi(f)(t) \longrightarrow g(0)\psi(f)(0)=0$, quand $t\longrightarrow 0^+$, car g et $\psi(f)$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$ et $g(0)=0$.

b) $\dfrac{g^2(t)}{t^2} = (\psi(f)(t))^2 \longrightarrow (\psi(f)(0))^2$, quand $t\longrightarrow 0^+$, car $\psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc $t\mapsto \dfrac{g^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0,b]$ car prolongeable par continuité en 0^+.

D'autre part : $\displaystyle\int_0^b \psi(f)^2(t)dt = \int_0^b \frac{g^2(t)}{t^2}dt$, par définition de $\psi(f)$, pour l'autre égalité on va utiliser une intégration par parties, avec $u=g^2(t), v'=\dfrac{1}{t^2}$, donc $u'=2g'(t)g(t)$ et $v=-\dfrac{1}{t}$, d'où :

$$\begin{aligned}
\int_0^b \frac{g^2(t)}{t^2}dt &= \left[-\frac{g^2(t)}{t}\right]_0^b + 2\int_0^b \frac{g'(t)g(t)}{t}dt \\
&= -\frac{g^2(b)}{b} + 2\int_0^b \frac{g'(t)g(t)}{t}dt \\
&\quad \text{car : } \lim_{t\to 0^+} \frac{g^2(t)}{t} = 0 \\
&= -\frac{g^2(b)}{b} + 2\int_0^b f(t)\psi(f)(t)dt \\
&\quad \text{car : } g'(t) = f(t), \frac{g(t)}{t} = \psi(f)(t)
\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}
\int_0^b \psi(f)^2(t)dt &\leq 2\int_0^b f(t)\psi(f)(t)dt \quad \text{D'aprés (1)} \\
&\leq 2\sqrt{\int_0^b f^2(t)dt}\sqrt{\int_0^b \psi(f)^2(t)dt}
\end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de Cauchy-Shwarz.

Si $\int_0^b \psi(f)^2(t)dt = 0$, c'est terminé, sinon on peut simplifier avec et on obtient encore le résultat demandé.

d) Découle immédiatement de 2-4) en faisant tendre b vers $+\infty$.

3) a)

b) Faire tendre b vers $+\infty$ dans (1), en utilisant 3-1).

4) $$\begin{aligned}
\|\psi(f) - 2f\|^2 &= (\psi(f) - 2f, \psi(f) - 2f) \\
&= (\psi(f), \psi(f)) - 4(\psi(f), f) + 4(f, f) \\
&= \|\psi(f)\|^2 - 4(\psi(f), f) + 4\|f\|^2 \\
&= -4(\psi(f), f) + 8\|f\|^2 \quad \text{Car : } \|\psi(f)\| = 2\|f\| \\
&= -4(\psi(f), f) + 2\|\psi(f)\|^2 \quad \text{Car : } \|\psi(f)\| = 2\|f\| \\
&= 0 \quad \text{D'aprés 3-2)}
\end{aligned}$$

Donc $\psi(f) - 2f = 0$, ainsi si $f \neq 0$, on aurait 2 est une valeur propre de ψ, impossible puisque les valeurs propres de ψ sont les $\lambda \in]0, 1]$.

5) a) Pour $x \neq 0$, on a : $\psi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Pour $x = 0$, on a : $\psi(f)(0) = f(0) = 1$.

b) Au voisiange de 0 : $f^2(x) \sim 1$

Au voisinage de $+\infty$: $f^2(x) \sim \frac{1}{x^2}$, donc f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, or f continue, donc $f \in E_2$.

$$\begin{aligned}
(f|\psi(f)) &= \int_0^{+\infty} f(t)\psi(f)(t)dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt \\
&= \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt \\
&= \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt + \int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1+u}{u}\right)}{1+u}du \qquad \text{Avec : } u = \frac{1}{t} \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)} + \frac{\ln\left(\frac{1+t}{t}\right)}{1+t}\right)dt \quad \text{On remplace u par t} \\
&= \int_0^1 \frac{(1+t)\ln(1+t) - t\ln t}{t(1+t)}dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\ln(1+t)}{t} - \frac{\ln t}{1+t}\right)dt
\end{aligned}$$

c) $(\ln t\ln(1+t))' = \frac{\ln(1+t)}{t} + \frac{\ln t}{1+t}$, donc $\ln t\ln(1+t)$ est une primitive de $\frac{\ln(1+t)}{t} + \frac{\ln t}{1+t}$.

Calculons d'abord : $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt$ et $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt$, en effet :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt &= [\ln t\ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt \\
&\quad \text{Intégration par parties avec :} \\
&\quad u = \ln(1+t) \quad v' = \frac{1}{t} \\
&\quad u' = \frac{1}{1+t} \qquad v = \ln t \\
&= -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt \\
&\quad \text{Car au voisinage de } 0^+ : \ \ln t\ln(1+t) \sim t\ln t \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Fin.}}$